JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

BOGOLIUBOV LABORATORY OF THEORETICAL PHYSICS

FINAL REPORT ON THE INTEREST PROGRAMME

Next-to-leading logarithmic QED corrections

Krivorol Viacheslav

supervised by
Prof. Andrej Borisovich Arbuzov

November
2020

Abstract

In this project methods of high-precision calculations in quantum electrodynamics are being developed. General provisions of the theory are discussed. Topics of project are studying the standard leading and next to leading logarithmic approximations and solving evolution equations within perturbative QED.

Основная часть

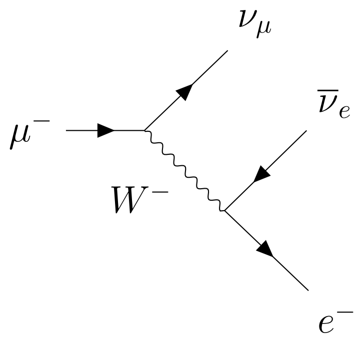
Введение

В настоящее время как и вся современная физика, так и физика высоких энергий в частности, переживает период кризиса. Это происходит потому, что есть конкретные указания (например аномалии в распаде заряженного B-мезона, аномальный магнитный момент мюона, тёмная материя и многое другое) на то, что стандартная модель не является окончательной теорией фундаментальных взаимодействий. Однако эти указания совершенно не помогают понять, в каком направлении нужно развивать современную науку для преодоления этих трудностей.

Идея, заложенная в основу этого проекта, в том, что чтобы понять, в каком направлении нужно двигаться, нужно сначала с довольно большой точностью изучить процессы, которые мы, как нам кажется, хорошо понимаем. В нашем случае речь будет идти об электродинамических поправках в высших порядках. Причём под высшими поправками подразумевается не только счёт всё более и более сложных диаграмм, но и выделении в теории возмущений с помощью метода ренормализационной группы [6] наиболее существенных вкладов. Метод выделения таких вкладов называется методом структурных функций, изначально хорошо развитым в квантовой хромодинамике Владимиром Наумовичем Грибовым и Львом Николаевичем Липатовым.

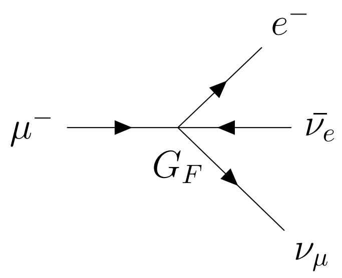
Идея выделения наиболее значимых вкладов в теории вкладов основана на том, что в теории возмущений электродинамики присутствует не только малый параметр $\alpha \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры, по которому идёт разложение, но и так называемый «большой логарифм» $\mathbf{L}$ — некоторый формально большой параметр теории, связанный с малостью массы электрона по сравнению с характерной энергией происходящего процесса (в теории сильных взаимодействий аналогом служит малость масштаба Λ_{QCD}).

Для демонстрации, откуда в теории может взяться большой логарифм, рассмотрим процесс распада мюона:



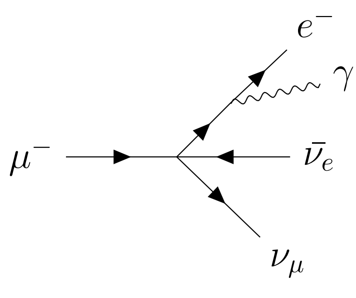
(1)

Известно, что с учетом малости массы мюона по сравнению с массой W-бозона можно перейти к эффективной модели Ферми с константой взаимодейсвия G_F (бозонный пропагатор стягивается в точку в первом порядке разложения по обратной массе W-бозона):



(2)

Теперь рассмотрим процесс излучения фотона с произвольной энергией (опуская тензорную структуру):



$$\sim \int \frac{dk_1 dk_2 dk_3}{2k_0} \cdot \frac{1}{(\mathbf{p}_e + \mathbf{k})^2 - m_e}, \tag{3}$$

где $\mathbf{p}_e$ есть импульс электрона после излучения, k есть импульс фотона, m_e есть масса электрона, а k_i есть i-ая компонента 4-х мерного импульса $\mathbf{k}$. Рассмотрим в этом интеграле только зависимость от углов (угол направления вылета фотона отсчитывается от направления импульса электрона), которая, как можно показать, сведётся к выражениям вида

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\cos\theta}{1-\beta_e\cos\theta} = \frac{1}{\beta_e}\ln\left[\frac{1+\beta_e}{1-\beta_e}\right] \approx \frac{1}{\beta_e}\ln\left[\frac{m_\mu^2}{m_e^2}\right], \tag{4}$$

где

$$\beta_e = \sqrt{1-\frac{m_e^2}{E_e^2}} \tag{5}$$

есть релятивистская скорость, m_e и m_μ есть массы электрона и мюона соответственно, а E_e — энергия электрона. Известно, что масса мюона много больше массы электрона, поэтому

$$\mathbf{L} \equiv \ln\left[\frac{m_\mu^2}{m_e^2}\right] >> 1. \tag{6}$$

Конкретно в этом случае полезно привести значение этого логарифма:

$$\ln\left[\frac{m_\mu^2}{m_e^2}\right] \approx 10{,}6. \tag{7}$$

В дальнейшем величины такого рода будут именоваться «большими логарифмами», а их наличие, по понятным причинам, массовыми сингулярностями [5]. Также можно заметить, что наибольший вклад в интеграл (4) дают углы вылета фотона, практически совпадающие с направлением импульса электрона. Из-за этого наличие больших логарифмов часто называется «коллинеарными сингулярностями».

Описание процесса распада мюона через модель Ферми демонстрирует так называемую факторизацию процессов на разных масштабах. Суть её в том, что можно отделить описание «жёстких процессов», происходящих на малых масштабах/больших энергиях (в нашем случае это обмен массивным W-бозоном), и «мягких процессов», происходящих на больших пространственных/малых энергетических масштабах (излучение фотона электроном). Это происходит из-за подавления интерференции жестких и мягких подпроцессов.

Данный пример из теории электрослабых взаимодействий содержит в себе основные моменты, которые активно использовались по мере всего проекта, главными из которых является наличие «больших логарифмов» и факторизация пространственных масштабов, однако в контексте квантовой электродинамики. Здесь, вместо процесса распада мюона, рассматривается гораздо более простой процесс распространение электрона с возможным излучением фотонов.

Наличие массовых сингулярностей, в некотором смысле, перестраивает теорию возмущений по константе связи α за счёт усиления ими радиационных поправок. В соответствие с этим выделяют [2]:

- теорию возмущений по $\alpha^n \mathbf{L}^n$, $n = 0,1,2,\ldots$ — главное логарифмическое приближение [1],
- кроме слагаемых из главного логарифмического приближения учёт членов порядка $\alpha^n \mathbf{L}^{n-1}$, $n = 1,2,\ldots$ — следующее за главным логарифмическое приближение [2],

и так далее.

Возможность факторизации процессов, происходящих на различных масштабах, дают возможность изучать так называемые функции распределения партонов. Функцией распределения партонов $\mathfrak{D}_{ij}(x,s)$ будем называть, по определению, плотность вероятности найти частицу j в частице i с долей энергии x при характерной энергии процесса $\sqrt{s}$. Факторизация позволяет написать уравнение эволюции для функции распределения партонов $\mathfrak{D}_{ij}(x,s)$ (в электродинамике мы будем интересоваться структурной функцией электрон-в-электрон $\mathfrak{D}_{ee}$), которое носит название уравнения Докшицера —Грибова —Липатова —Альтарелли —Паризи [1,3,4] [3]:

$$\frac{\partial}{\partial \ln s}\mathfrak{D}_{ih}(x,s) = \frac{\alpha(s)}{2\pi}\int\limits_x^1 \frac{dz}{z} P_{ij}(x/z)\mathfrak{D}_{jh}(z,s), \tag{8}$$

где ядро уравнения P_{ij}, которое называется функцией расщепления, определяет скорость изменения вероятности распределения партонов типа i за счёт испускания партонов типа j с квадратом переданного импульса s. Важно, что функции расщепления считаются пертурбативно.

[1] Leading Order
[2] Next-to-Leading Order
[3] сокращённо «уравнение ДГЛАП»

В частности, для несинглетного канала (фермионные линии не должны рваться) для функции $\mathfrak{D}_{ee}(x,s)$ для функции распределения партонов в электроне (которая также называется *структурной функцией электрона*) справедливо уравнение, которое может быть получено из уравнения ДГЛАП:

$$\mathfrak{D}_{ee}(x,s) = \delta(1-x) + \int\limits_{m^2}^{s} \frac{\alpha(s)}{2\pi}\frac{dt}{t}\Big[P^{(0)} \otimes \mathfrak{D}_{ee}(t)\Big](x), \tag{9}$$

где $P^{(0)}(x)$ — одна из функций расщепления, определённа с помощью некоторой процедуры регуляризации полюсной особенности порядка 1, носящей название «плюс-прескрипция»:

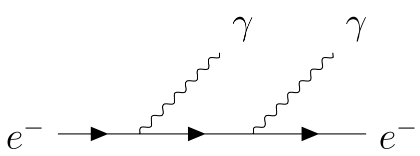
$$P^{(0)}(x) = \left[\frac{1+x^2}{1-x}\right]_+, \tag{10}$$

$$\int\limits_{y}^{1} dx\ [f(x)]_+ g(x) = \int\limits_{0}^{1} dx f(x)[g(x)\theta(x-y) - g(1)], \tag{11}$$

где $g(x)$ не имеет особенности в точке 1. Знак «$\otimes$» обозначает интегральную свёртку типа *конволюции*:

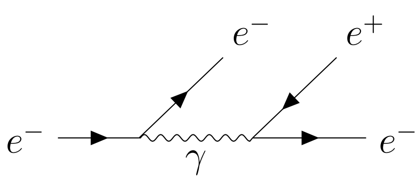
$$[f \otimes g](z) = \int\limits_{z}^{1} \frac{dx}{x} f(x) g\Big(\frac{z}{x}\Big). \tag{12}$$

Типичный процесс в несинглетном канале выглядит следующим образом:



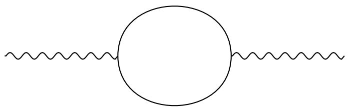
(13)

В синглетном же канале могли бы встречаться процессы:



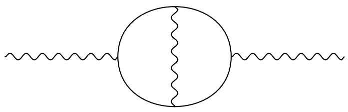
(14)

В уравнении (9) учтён бег константы связи на различных масштабах. В частности, для наших целей достаточно будет учесть вклад *поляризации вакуума*, то есть диаграмм структуры



(15)

а также двухпетлевых вкладов вида



(16)

Стрелки, обозначающие фермионные линии, подразумеваются и опущены. С учётом этих вкладов бег константы связи с нужной для следующего за главным логарифмического приближения имеет вид

$$\alpha(s) = \alpha(0)\left[1 + \frac{\alpha(0)}{3\pi}\mathbf{L} + \left(\frac{\alpha(0)}{3\pi}\mathbf{L}\right)^2 + \frac{\alpha^2(0)}{4\pi^2}\mathbf{L}\right]. \tag{17}$$

Цели проекта

Главной целью данного проекта ставится освоение методов получения высокоточных решений уравнений типа (9), а конкретно

- изучение стандартного для квантовой хромодинамики формализма факторизации и его рассмотрение в случае квантовой хромодинамики,
- приобретение опыта в счёте интегралов типа конволюции, включая как аналитические вычисления, так и вычисления в математических пакетах,
- проведение стандартных аналитических вычислений с целью воспроизведения известных аналитических результатов.

Данный проект призван помочь разобраться с основами современных иследований в квантовой электродинамике для получения возможности продолжения более глубокой работы в этой области.

Результаты

Результатом данного проекта можно считать освоения участниками проекта необходимой базы для возможности продолжения работы в высокоточных вычислениях в квантовой электродинамики. Был изучен стандартный материал в этой области, воспроизведены некоторые типовые вычисления (взятие интегралов конволюции, итерационные пертурбативные вычисления $\mathfrak{D}_{ee}$, освоение методов работы с плюс-прескрипцией и так далее). В частности, было получено решение для $\mathfrak{D}_{ee}$ в несинглетном канале в третьем порядке итерационной процедуры и следующем за главным логарифмическом приближении с точностью $\mathcal{O}(\alpha^3\mathbf{L}^3,\alpha^3\mathbf{L}^2)$.

Заключение

Необходимо отметить, что эффекты высших порядков КЭД необходимо учитывать в современных и будущих высокоточных экспериментов в физике высоких энергий, в первую очередь, на коллайдерах. Проведение прецизионного сравнения теоретических предсказаний, сделанных с учетом квантовых эффектов высших порядков, исключительно важно для верификации стандартной модели физики элементарных частиц и поиска новых физических явлений за ее рамками.

Список литературы

[1] Altarelli G., Parisi G. Asymptotic freedom in parton language // Nuclear Physics B. — 1977. — Vol. 126, no. 2. — P. 298 – 318. — URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321377903844.

[2] Arbuzov A.B. Leading and Next-to-Leading Logarithmic Approximations in Quantum Electrodynamics // Phys. Part. Nucl. — 2019. — Vol. 50, no. 6. — P. 721–825.

[3] Dokshitzer Yu. L. // JETP. — 1977. — Vol. 73. — P. 1216–1249.

[4] Gribov V. N., Lipatov L. N. Deep inelastic e p scattering in perturbation theory // Sov. J. Nucl. Phys. — 1972. — Vol. 15. — P. 438–450. — [Yad. Fiz.15,781(1972)].

[5] Kinoshita T. Mass singularities of Feynman amplitudes // J. Math. Phys. — 1962. — Vol. 3. — P. 650–677.

[6] Vasilev A. N. The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics. — Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004. — P. xvi+681. — ISBN: 0-415-31002-4. — Translated from the 1998 Russian original by Patricia A. de Forerand-Millard and revised by the author. URL: https://doi.org/10.1201/9780203483565.