JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

BOGOLIUBOV LABORATORY OF THEORETICAL PHYSICS

Final report on the interest programme

Next-to-leading logarithmic QED corrections

Taisiia Zaitseva

supervised by
Prof. A. B. Arbuzov

November
2020

Abstract

The project is dedicated to the study of next-to-leading logarithmic QED radiative corrections. The formalism of electron structure and fragmentation functions is applied. The evolution equation is discussed. Solving the evolution equation within the next-to-leading logarithmic approximation takes part of the project.

Основная часть

Введение

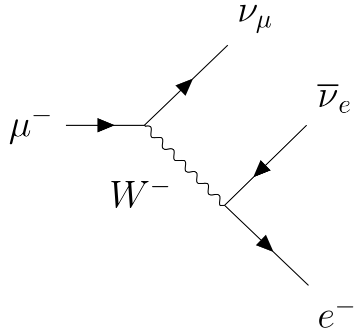
В настоящее время общепринятой теорией элементарных частиц и их взаимодействий является стандартная модель. Стандартная модель тщательно проверена экспериментально и находится в хорошем согласии с результатами экспериментов, но, как и у любой теории, у стандартной модели существуют границы применимости. Важным вопросом физики высоких энергий является определение пределов применимости стандартной модели, и мы близко к этому подошли. Хоть и экспериментальные данные, полученные на ускорителях, находятся в хорошем согласии со стандартной моделью, существует ряд указаний на близость открытия «новой физики».

В основе проекта лежит следующая идея: чтобы понять, в каком направлении нужно двигаться, нужно сначала с довольно большой точностью изучить процессы, которые мы, как нам кажется, хорошо понимаем. Возрастающая точность эксперимента обязует повышать точность и теоретических предсказаний. Как известно, большую точность в квантовополевых теориях возможно обеспечить использованием *ренормализационной группы*, идеи которой мы хотим эксплуатировать.

Основная идея ренормгруппы состоит в том, что в теории возмущений электродинамики присутствует не только малый параметр $\alpha \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры, по которому идёт разложение, но и разностепенные логарифмические вклады от больших аргументов, которые и ответственны за возможность выделения наиболее существенных вкладов. Так, например, для увеличения точности нужно считать величины $\alpha^n \mathrm{L}^n$ и $\alpha^n \mathrm{L}^{n-1}$ разными по порядку.

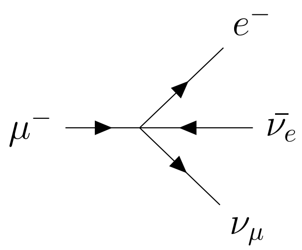
Распад мюона

Для демонстрации, откуда в теории может взяться логарифм большого аргумента, рассмотрим процесс распада мюона:



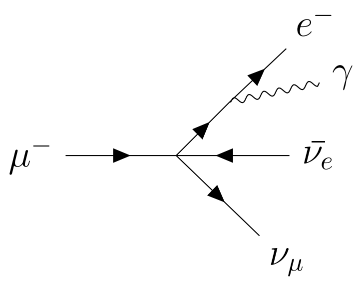
(1)

Так как масса мюона μ^- мала по сравнению с массой W-бозона, то можно разложить пропагатор W-бозона в ряд и ограничиться первым вкладом. Это соответствует переходу к описанию процесса в эффективной модели Ферми. Хоть данная теория и является неперенормируемой, она хорошо описывает процесс распада в некотором диапазоне энергий. Соответствующая этому вершина будет выглядеть следующим образом:



(2)

Теперь рассмотрим процесс излучения фотона с произвольной энергией, и рассмотрим уловую зависимость в амплитуде этого процесса. Иннорируя все другие зависимости, можно показать, что



$$\longrightarrow \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\cos\theta}{1-\beta_e\cos\theta}, \tag{3}$$

где β_e есть релятивистская скорость электрона. Этот интеграл легко берётся. Можно продемонстрировать, что интегрирование по углам, близких к нулю, и выдаёт нам логарифм с большим аргументом:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{d\cos\theta}{1-\beta_e\cos\theta} \sim \ln\left[\frac{m_\mu^2}{m_e^2}\right] \approx 10.6. \tag{4}$$

В дальнейшем величины такого рода будут именоваться «большими логарифмами». Общая структура этих объектов в разных науках одинакова (логарифм отношения характерной энергии процесса к массе лёгкой частицы, в нём участвующей), хоть и детали могут отличаться. Учитывая природу их происхождения, их наличие в квантовополевой модели называют *массовыми или коллинеарными сингулярностями*. Их наличие в теории регулирует так называемая «теорема Киношиты-Ли-Науэнберга».

Важную роль в методах выделения лидирующих вкладов в исследуемые процессы играет возможность факторизации разных энергетических масштабов, что и было продемонстрировано на переходе от описания в рамках стандартной модели к описанию в рамках феноменологической модели Ферми. При некоторых условиях возможно отделить описание «жёстких процессов», происходящих на малых расстояниях/больших энергиях (в нашем случае это обмен массивным W-бозоном), и «мягких процессов», происходящих на больших пространственных/малых энергетических масштабах (излучение фотона электроном). Это происходит из-за подавления квантовомеханической интерференции жестких и мягких подпроцессов, поэтому их можно разделить уже на уровне вероятностей, что активно используется в методе структурных функций, который был развит советскими физиками Л. Н. Липатовым и В. Н. Грибовым. Первоначально этот метод был предложен в рамках квантовой хромодинамики, однако после был обобщён и на другие модели, в частности квантовую электродинамику.

Рассмотренный нами пример из теории электрослабых взаимодействий содержит в себе основные моменты, которые активно использовались по мере всего проекта, главными из которых является наличие «больших логарифмов» и факторизация пространственных масштабов. Однако далее мы будем вместо процесса распада мюона рассматривать гораздо более простой процесс — распространение электрона с возможным излучением фотонов.

Большой логарифм в КЭД

В квантовой электродинамике разложение ведётся по степеням постоянной тонкой структуры $\alpha = 1/137$:

$$d\sigma = d\sigma^{Born} + d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)} + d\sigma^{(3)} + \mathcal{O}(\alpha^4). \tag{5}$$

Здесь $d\sigma^{Born}$ — борновское дифференциальное сечение в низшем порядке теории возмущений для заданного процесса, $d\sigma^{(1)}$ — вклад в сечение поправок первого порядка и т.д. Оказывается, иногда достаточно учесть только наиболее существенные вклады в каждом порядке. Для определения наиболее существенных вкладов в эти сечения и испольуется учёт больших логарифмов. В квантовой электродинамике большим логарифмом называется величина

$$L \equiv \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}, \tag{6}$$

где Λ — характерный масштаб энергии исследуемого процесса, m — масса частицы. В стандартных экспериментах на коллайдерах обычно масштаб энергии значительно превышает массу частицы.

Большие логарифмы, присутствующие в теории возмущений, переопределяют понятие «порядка величины». В электродинамике есть смысл разделять

1. учёт членов порядка $\alpha^n \mathrm{L}^n$, $n = 0,1,2,\ldots$ — ведущее логарифмическое приближение;

2. учёт членов порядка $\alpha^n \mathrm{L}^{n-1}$, $n = 1,2,\ldots$ — следующее за ведущим логарифмическое приближение (NLO);

3. учёт членов порядка $\alpha^n \mathrm{L}^{n-2}$, $n = 2,3,\ldots$ — следующее за следующим за ведущим главным логарифмическое приближение (NNLO),

и так далее. При работе над проектом учитывались ведущее и следующее за ведущим логарифмические приближения. Поправки NNLO не учитывались.

Для нахождения вкладов ведущего и следующего за ведущим логарифмических приближений был использован формализм структурных функций электрона.

Возможность факторизации процессов, происходящих на различных масштабах, дают возможность изучать так называемые функции распределения партонов. Функцией распределения партонов $\mathscr{D}_{ij}(x,s)$ будем называть, по определению, плотность вероятности найти частицу i в частице j с долей энергии x при характерной энергии процесса $\sqrt{s}$. Факторизация позволяет написать уравнение эволюции для функции распределения партонов $\mathscr{D}_{ij}(x,s)$, которое носит название уравнения Докшицера —Грибова — Липатова —Альтарелли —Паризи:

$$\frac{\partial}{\partial \ln s}\mathscr{D}_{ih}(x,s) = \frac{\alpha(s)}{2\pi}\int\limits_x^1 \frac{dz}{z}P_{ij}\left(\frac{x}{z}\right)\mathscr{D}_{jh}(z,s), \tag{7}$$

где ядро уравнения P_{ij}, которое называется функцией расщепления, определяет скорость изменения вероятности распределения партонов типа j за счёт испускания партонов типа i с квадратом переданного импульса s. Важно, что функции расщепления могут быть выражены через ряд теории возущений. В электродинамике мы будем интересоваться структурной функцией $\mathscr{D}_{ee}$

В частности, для несинглетного канала (фермионные линии не должны рваться) для функции $\mathscr{D}_{ee}^{NS}(x,s)$ для функции распределения партонов в электроне (которая также называется *структурной функцией электрона*) справедливо уравнение, которое может быть получено из уравнения ДЛГАП:

$$\mathscr{D}_{ee}^{NS}(x,s) = \delta(1-x) + \int\limits_{m^2}^{s} \frac{\alpha(s)}{2\pi}\frac{dt}{t}\Big[P^{(0)} \otimes \mathscr{D}_{ee}(t)\Big](x), \tag{8}$$

где $P^{(0)}(x)$ — одна из функций расщепления, определённа с помощью некоторой процедуры регуляризации полюсной особенности порядка 1, носящей название «плюс-прескрипция»:

$$P^{(0)}(z) = \left[\frac{1+z^2}{1-z}\right]_+, \tag{9}$$

где одно из возможных определений плюс-прескрипции определяется как

$$\int\limits_y^1 dx\ [f(x)]_+ g(x) = \int\limits_0^1 dx f(x)[g(x)\theta(x-y) - g(1)] \tag{10}$$

где $g(x)$ не имеет особенности в точке 1. Однако для численных вычислений более удобным является следующая форма плюс-прескрипции, тесно связанная с методом Δ-регуляризации:

$$[f(x)]_+ = \lim_{\Delta\to 0}[\delta(1-x)f_\Delta + \Theta(1-\Delta-x)f(x)\big|_{x<1}], \tag{11}$$

где

$$f_\Delta = -\int\limits_0^{1-\Delta} f(x)dx. \tag{12}$$

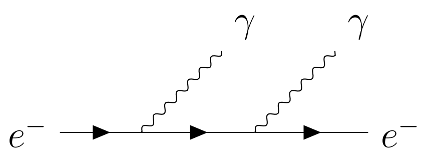
Эта форма регуляризации позволяет существенно автоматизировать процесс численного счёта.

Знак «$\otimes$» обозначает интегральную свёртку типа *конволюции*:

$$[f\otimes g](z) = \int\limits_z^1 \frac{dx}{x} f(x) g\Big(\frac{z}{x}\Big). \tag{13}$$

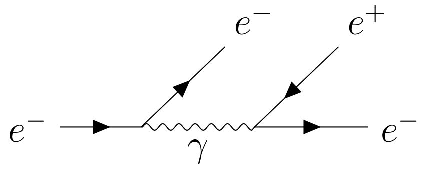
Работать с интегралами типа конволюции можно разными способами. Например, можно использовать метод моментов Меллина или другие способы вычисления.

Несинглетность канала означает, что фермионные входящие и выходящие линии не должны «рваться». Это означает, например, что в несинглетном канале разрешён процесс типа



(14)

и запрещены процессы вида



(15)

(видно, что посередине фермионная линия прерывается бозонной).

В уравнении (8) учтён бег константы связи на различных масштабах, вычисленный с помощью уравнения ренормгруппы в следующем за главным логарифмическим приближением:

$$\alpha(s) = \alpha(0)\left(1 + \frac{\alpha(0)}{3\pi}\mathrm{L} + \frac{\alpha^2(0)}{(3\pi)^2}\mathrm{L}^2 + \frac{\alpha^2(0)}{4\pi^2}\mathrm{L}\right). \tag{16}$$

Для получения этих вкладов вычислены однопетлевые диаграммы типа поляризации вакуума и нужные для третьего порядка NLO двухпетлевые поправки.

Цели проекта

Основной целью проекта было знакомство с применением ренормгрупповых методов для получения высокоточных поправок теории возмущений в КЭД, в том числе изучение теоретического материала и проведение типовых рассчётов.

Цели данного проекта кратко можно сформулировать следующим образом.

1. Изучение формализма структурных функций и теоремы факторизации.

2. Аналитические и численные вычисления конволюционных интегралов, в том числе содержащих плюс-прескрипцию.

3. Итерационное решение уравнения эволюции для функции распределения партонов для КЭД в ведущем логарифмическом приближении.

4. Уточнение результатов до следующего за ведущим логарифмического приближения.

Результаты

В рамках данного проекта его участниками был изучен теоретический материал по феноменологии стандартной модели и вычислениях с отбором наиболее значимых вкладов ренормгрупповым методом в квантовой электродинамике. Были проведены типовые рассчёты, такие как решение уравнения эволюции для несинглетной функции $\mathscr{D}_{ee}$ до третьей итерации включительно и точности $\mathcal{O}(\alpha^3\mathrm{L}^3,\alpha^3\mathrm{L}^2)$, а также были вычислены некоторые типичные конволюционные интегралы. Стоит отметить, что учёт эффектов старших порядков теории возмущений необходим для современных экспериментов в физике высоких энергий для апробации стандартной модели или выхода за её пределы. Навыки, полученные в данном проекте, исключительно полезны и дают возможность продолжения исследований в данной области.